

# Introdução à Lógica

Robinson Alves Lemos

19 de agosto de 2009

## 1 Proposições

**Definição 1** *Uma proposição ou sentença é qualquer declaração afirmativa com sentido completo que satisfaz:*

1. *Admite apenas dois valores lógicos: Verdadeiro (V) ou Falso (F), chamado de “Princípio do Terceiro Excluído”.*
2. *Não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, chamado de “Princípio da não Contradição”.*

Observe as seguintes declarações:

1. Como o dia está quente!
2. A lua é um satélite da Terra.
3.  $3 + 4$  (três mais quatro)
4.  $9 > 50$  (nove é maior que cinquenta)
5. Corra!
6. Que horas são?
7. Vou viajar.
8. Ele passou nos exames e reprovou.
9. Se Carlos dormir, ele perderá seu programa favorito.

10. Maria foi ao mercado.

11. Pedro é um.

As declarações 2, 4, 7, 8, 9, 10 são proposições, pois possuem sentido completo e podem (algumas sob determinadas circunstâncias) ser classificadas como verdadeiras ou falsas. As declarações 1, 3, 5, 6, 11 não são proposições: 1 e 5 são declarações exclamativas, 3 e 11 não possuem sentido completo e 6 é uma interrogação.

## 1.1 Proposições Simples e Compostas

**Definição 2** *Uma proposição é composta se é formada por duas ou mais proposições. Caso contrário, a proposição é dita simples.*

**Exemplos 1** *Proposições simples:*

1. *Maria gosta de sorvete.*
2.  $3 + 5 = 9$
3. *Cuiabá é a capital do Rio de Janeiro.*

**Exemplos 2** *Proposições compostas:*

1. *Maria gosta de sorvete e Carlos gosta de pudim.*
2. *Se hoje chover, assistiremos um filme.*
3. *Paulo gosta de pizza ou Pedro irá ao cinema.*

## 1.2 Notação das proposições

Para simplificar utilizaremos letras minúsculas para representar as proposições, da seguinte forma:

$p$ : Maria gosta de computadores.

$q$ :  $3 + 7 = 2$

$r$ : Carlos comprou uma bicicleta.

Desta forma não precisaremos repetir toda a proposição para nos referirmos a ela, por exemplo, a proposição  $q$  definida anteriormente é falsa, ou

podemos usar a seguinte notação para o valor lógico de  $q$  :  $V(q) = F$  e, isto significa que o valor lógico de  $q$  ( $3 + 7 = 2$ ) é falso.

Formamos proposições compostas a partir de outras proposições (simples ou compostas) através dos conectivos:

Símbolo	Conectivo	Nome
$\wedge$ ou $\&$	e	conjunção
$\vee$ ou $+$	ou	disjunção
$\underline{\vee}$	ou (exclusivo)	disjunção
$\rightarrow$	se então	condicional
$\leftrightarrow$	se, e somente se	bicondicional
$\sim$ ou $\neg$	não é verdade que	negação

**Exemplos 3** *Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  proposições definidas por:*

*$p$ : Cláudia é piloto de testes.*

*$q$ : Reinaldo joga basquete.*

*$r$ : Está chovendo.*

1.  $p \wedge q$  (simbolicamente)

*Cláudia é piloto de testes e Reinaldo joga basquete. (linguagem natural)*

2.  $p \vee r$  (simbolicamente)

*Cláudia é piloto de testes **ou** está chovendo. (linguagem natural)*

3.  $p \underline{\vee} q$  (simbolicamente)

*Cláudia é piloto de testes **ou** Reinaldo joga basquete. (linguagem natural)*

4.  $r \rightarrow q$  (simbolicamente)

***Se** está chovendo **então** Reinaldo joga basquete. (linguagem natural)*

5.  $p \leftrightarrow r$  (simbolicamente)

*Cláudia é piloto de testes **se, e somente se,** está chovendo. (linguagem natural)*

6.  $\sim q$  (simbolicamente)

***Não é verdade que** Reinaldo joga basquete. (linguagem natural)*

7.  $\neg r$  (simbolicamente)

**Não** está chovendo. (linguagem natural)

**Exercício 1** Considere as seguintes proposições:

$p$ :  $\pi$  é irracional.

$q$ : A neve é quente.

$r$ : Cuiabá é a capital de Mato Grosso.

$s$ :  $13 - 5 = 19$

Escreva na linguagem natural as seguintes proposições:

1.  $p \wedge q$

2.  $r \vee s$

3.  $(p \wedge q) \vee s$

4.  $r \rightarrow (q \vee r)$

5.  $((\sim r) \vee s) \rightarrow (p \vee q)$

6.  $q \leftrightarrow (r \rightarrow s)$

7.  $r \rightarrow (q \leftrightarrow (s \rightarrow p))$

8.  $(r \vee q) \rightarrow (p \wedge (\sim (r \rightarrow \sim (q))))$

9.  $(r \vee (\sim q)) \leftrightarrow (\sim s)$

10.  $\sim (p \rightarrow ((\sim s) \vee q))$

## 2 Tabela-Verdade

A partir de proposições simples e os conectivos, construiremos tabelas-verdade de novas proposições, que nos darão todas os valores lógicos possíveis, utilizando o valor lógico das proposições mais simples.

## 2.1 Negação

Seja  $p$  uma proposição. Quando  $V(p) = V$  temos que  $V(\sim p) = F$ , mas se  $V(p) = F$ , teremos  $V(\sim p) = V$ .

Podemos traduzir esta informação na seguinte tabela:

$p$	$\sim p$
V	F
F	V

Esta é a tabela-verdade da proposição  $\sim p$ .

## 2.2 Conjunção

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. As possibilidades para os valores lógicos de  $p$  e  $q$  são:

$p$	$q$
V	V
V	F
F	V
F	F

Com esta informação, podemos construir a tabela-verdade de  $p \wedge q$ . Sabendo que  $p \wedge q$  só é verdadeira quando  $V(p) = V$  e  $V(q) = V$ , nos demais casos  $V(p \wedge q) = F$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

## 2.3 Disjunção (Inclusiva)

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições,  $p \vee q$  é falsa quando  $V(p) = F$  e  $V(q) = F$  simultaneamente.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

## 2.4 Disjunção (Exclusiva)

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições,  $p \underline{\vee} q$  é verdadeira quando apenas uma das proposições é verdadeira.

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

## 2.5 Condicional

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições,  $p \rightarrow q$  é falsa apenas quando  $V(p) = V$  e  $V(q) = F$ .

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

## 2.6 Bicondicional

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições,  $V(p \leftrightarrow q) = V$  somente quando  $V(p) = V(q)$ .

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

## 2.7 Construção de Tabelas-Verdade

Para construção das tabelas-verdade de proposições mais elaboradas, precisamos determinar inicialmente o número de linhas e, para isso, contamos o número de proposições sem valor lógico fixo.

**Exemplo 4** Para fazer a tabela-verdade de  $p \wedge (q \vee r)$ , temos 3 proposições sem valor lógico fixo.

Se sabemos que  $V(q) = V$ , a proposição  $p \wedge (q \vee r)$  possui 2 proposições sem valor lógico fixo:  $p$  e  $r$ .

Após contarmos o número de proposições sem valor lógico fixo, teremos 2 elevado a este número de linhas na tabela, mais uma linha de cabeçalho.

**Exemplo 5** Sejam  $p, q$  e  $r$  proposições. O número de linhas da tabela-verdade de  $p \wedge (q \vee r)$  será  $2^3 (= 8)$  linhas, mais uma para o cabeçalho, onde colocaremos uma coluna para cada proposição sem valor lógico fixo:

$p$	$q$	$r$

Depois disso, precisaremos preencher todas as possibilidades para os valores lógicos das proposições, uma forma prática é como segue.

**Exemplo 6** 1. Metade da primeira coluna com o valor lógico  $V$  e a segunda metade com  $F$ .

$p$	$q$	$r$
$V$		
$V$		
$V$		
$V$		
$F$		
$F$		
$F$		
$F$		

2. o primeiro quarto da segunda coluna com valor lógico  $V$ , o segundo quarto com o valor lógico  $F$  e assim sucessivamente.

$p$	$q$	$r$
$V$	$V$	
$V$	$V$	
$V$	$F$	
$V$	$F$	
$F$	$V$	
$F$	$V$	
$F$	$F$	
$F$	$F$	

3. o primeiro oitavo da terceira coluna com valor lógico  $V$ , o segundo oitavo com valor lógico  $F$  e assim sucessivamente.

$p$	$q$	$r$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

4. Em nosso exemplo possuímos apenas 3 proposições, mas em caso de mais proposições prosseguiremos com o mesmo raciocínio, na quarta coluna, cada 16 avos seria preenchido com  $V$  e  $F$  alternadamente, na quinta coluna de proposições sem valores lógicos fixos, cada 32 avos preenchido com  $V$  e  $F$  alternadamente. Segue-se esse raciocínio caso existam mais colunas de proposições sem valores lógicos fixos.

Quando temos proposições com valores lógicos fixos, fazemos todo o processo para proposições sem valores lógicos fixos e em seguida acrescentamos uma coluna para cada proposição com valor lógico fixo. Cada linha dessas novas colunas terão os valores lógicos das proposições que representam.

**Exemplo 7** Se  $V(q) = F$ , a tabela-verdade da proposição  $p \wedge (q \vee r)$  terá 4 linhas:

$p$	$r$
$V$	$V$
$V$	$F$
$F$	$V$
$F$	$F$

Após construirmos esta parte, acrescentamos uma coluna para a proposição  $q$  que possui valor lógico fixo e preenchemos sua coluna com o seu valor lógico:

$p$	$r$	$q$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

A partir deste ponto acrescentamos colunas, de acordo com a necessidade, até chegarmos na proposição desejada, lembrando sempre de resolver apenas duas proposições por vez, ou seja, respeitando os parênteses.

**Exemplo 8** 1. Construir a tabela-verdade de  $p \wedge (q \vee r)$ :

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
$V$	$V$	$V$		
$V$	$V$	$F$		
$V$	$F$	$V$		
$V$	$F$	$F$		
$F$	$V$	$V$		
$F$	$V$	$F$		
$F$	$F$	$V$		
$F$	$F$	$F$		

2. Construir a tabela-verdade de  $(p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$(p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$
$V$	$V$			
$V$	$F$			
$F$	$V$			
$F$	$F$			

*Agora falta terminar de completar os valores lógicos de cada tabela.*

*No caso 1, inicialmente, resolvemos  $q \vee r$ : na primeira linha temos  $V(q) = V$  e  $V(r) = V$ . Como  $V \vee V$  resulta em  $V$ , a primeira linha da coluna  $q \vee r$  possuirá o valor  $V$ :*

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	
$V$	$V$	$F$		
$V$	$F$	$V$		
$V$	$F$	$F$		
$F$	$V$	$V$		
$F$	$V$	$F$		
$F$	$F$	$V$		
$F$	$F$	$F$		

*Repetimos o raciocínio e completamos a coluna de  $q \vee r$ , lembrando que  $V \vee F$  resulta em  $V$ ,  $F \vee V$  resulta em  $V$  e  $F \vee F$  resulta em  $F$ :*

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	
$V$	$V$	$F$	$V$	
$V$	$F$	$V$	$V$	
$V$	$F$	$F$	$F$	
$F$	$V$	$V$	$V$	
$F$	$V$	$F$	$V$	
$F$	$F$	$V$	$V$	
$F$	$F$	$F$	$F$	

*Para finalizar o exemplo 1, completamos a coluna  $p \wedge (q \vee r)$  utilizando para  $p$  os valores da primeira coluna, operados com o conectivo  $\wedge$  com os valores da quarta coluna ( $q \vee r$ ):*

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

No exemplo 2 teremos:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$(p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$

Note que na segunda coluna, operamos os valores da segunda coluna ( $q$ ) utilizando o conectivo  $\rightarrow$  (se ... então) com os valores da primeira coluna ( $p$ ).

**Exercício 2** Sejam  $p, q, r, s, t, u, v$  tais que  $V(r) = V, V(s) = F, V(u) = V$ .

Construa as seguintes tabelas-verdade:

1.  $p \wedge (q \rightarrow s)$
2.  $q \vee (q \rightarrow q)$
3.  $p \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
4.  $t \rightarrow (q \vee v)$
5.  $(t \wedge (\sim s)) \leftrightarrow (s \vee (\sim r))$
6.  $(u \rightarrow t) \leftrightarrow (p \wedge (\sim v))$
7.  $(v \leftrightarrow (\sim q)) \leftrightarrow (v \wedge t)$

8.  $(p \wedge (\sim u)) \rightarrow \sim (s \wedge u)$
9.  $(r \vee s) \leftrightarrow ((\sim q) \leftrightarrow s)$
10.  $(p \wedge q) \rightarrow (s \leftrightarrow (v \vee t))$
11.  $q \rightarrow (r \leftrightarrow (s \vee (t \wedge (\sim (v \rightarrow p)))))$
12.  $\sim ((p \vee s) \leftrightarrow (u \rightarrow (q \leftrightarrow (t \vee v))))$
13.  $\sim (((r \leftrightarrow q) \rightarrow t) \leftrightarrow p) \vee (r \vee t)$
14.  $\sim (((p \wedge u) \wedge \sim s) \rightarrow u) \leftrightarrow (s \wedge v)$
15.  $((\sim (t \vee v) \vee t) \wedge r) \wedge \sim (q \rightarrow p)$

### 3 Tautologia, Contradição e Indeterminação

**Definição 3** Dizemos que uma proposição  $p$  é uma tautologia se o seu valor lógico é sempre verdadeiro, independente do valor lógico das outras proposições que a compõem.

**Exemplo 9** Seja  $q$  uma proposição simples. A proposição  $q \vee \sim q$  é uma tautologia!

**Definição 4** Dizemos que uma proposição  $p$  é uma contradição se o seu valor lógico é sempre falso, independente do valor lógico das outras proposições que a compõem.

**Exemplo 10** Seja  $q$  uma proposição simples. A proposição  $q \wedge \sim q$  é uma contradição!

**Definição 5** Dizemos que uma proposição  $p$  é uma indeterminação se ela não é uma tautologia e nem é uma contradição.

**Exemplo 11** Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições simples. A proposição  $q \vee \sim p$  é uma indeterminação!

Desta forma, para verificar quando uma proposição  $p$  é tautologia, contradição ou indeterminação, basta fazer a tabela verdade de  $p$  e verificar a última coluna da tabela. Se os único valor que apareceu for  $V$ , a proposição será uma Tautologia. Caso o único valor seja  $F$ , a proposição será uma Contradição. No último caso, poderá aparecer  $V$  e  $F$  simultaneamente na última coluna e, conseqüentemente, teremos uma Indeterminação.

## 4 Implicação Lógica e Equivalência Lógica

**Definição 6** *Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Dizemos que  $p$  implica  $q$  (e denotamos por  $p \Rightarrow q$ ) quando  $p \rightarrow q$  é uma tautologia.*

**Exemplo 12** *Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Temos que  $p \wedge q$  implica  $p \vee q$ , (simbolicamente:  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ), pois  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$  é uma tautologia!*

*Por outro lado, temos que  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$  não é uma tautologia. Neste caso dizemos que  $p \vee q$  não implica  $p \wedge q$  e denotamos por  $(p \vee q) \not\Rightarrow (p \wedge q)$ .*

**Definição 7** *Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Dizemos que  $p$  é equivalente a  $q$  (e denotamos por  $p \Leftrightarrow q$ ) quando  $p \leftrightarrow q$  é uma tautologia.*

**Exemplo 13** *Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Temos que  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  é equivalente a  $p \leftrightarrow q$ , (simbolicamente:  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$ ), pois  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$  é uma tautologia!*

**Exemplo 14** *Temos que  $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$  não é uma tautologia. Neste caso dizemos que  $p \vee q$  não é equivalente a  $p \wedge q$  e denotamos por  $(p \vee q) \not\Leftrightarrow (p \wedge q)$ .*